Τομέας Μαθηματικής Ανάλυσης
Τμήμα Μαθηματικών
Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων

Συναρτησιακή Ανάλυση I (713)

Προτεινόμενη Βιβλιογραφία (Σύστημα Εύδοξος):

1) Στοιχεία συναρτησιακής ανάλυσης, Χ. Καρυοφύλλης.
2) Γενική Τοπολογία και Συναρτησιακή Ανάλυση, Σ. Νεγρεπόντης, Θ. Ζαχαριάδης, Ν. Καλαμίδας, Β. Φαρμάκη.
3) Συναρτησιακή Ανάλυση, Haim Brezis.

Πρόσθετη Βιβλιογραφία

1) Introduction to Banach spaces I, II, P. Habala, P. Hajek, V. Zizler.
2) Σημειώσεις Παραδόσεων Συναρτησιακής Ανάλυσης, Σ. Αργυρός (ελεύθερα διαθέσιμες στο internet).
3) Σημειώσεις Συναρτησιακής Ανάλυσης, Α. Γιαννόπουλος (ελεύθερα διαθέσιμες στο internet).
4) Στοιχεία Συναρτησιακής Αναλύσεως, Α. Κατσάρας.

Πρόγραμμα διδασκαλίας του μαθήματος:

1η - 3η εβδομάδα. Γραμμικοί (ή διανυσματικοί) χώροι και αλγεβρικές βάσεις (Hamel) βάσεις, χώροι με νόρμα και χώροι Banach, βασικές ιδιότητες κλασσικά παραδείγματα, φραγμένοι γραμμικοί τελεστές.
4η - 5η εβδομάδα. Φραγμένοι (ή συνεχείς) γραμμικοί τελεστές. Ο δυϊκός X^* ενός χώρου με νόρμα X. Χαρακτηρισμοί χώρων με νόρμα πεπερασμένης διάστασης.
6η - 8η εβδομάδα. Η αναλυτική μορφή του Θεωρήματος Hahn-Banach και οι συνέπειές του, συζυγείς (ή δυϊκοί) τελεστές. Η κανονική εμφύτευση του X στον δεύτερο δυϊκό του X^{**}, αυτοπαθείς χώροι.
9η - 11η εβδομάδα. Το Θεώρημα κατηγορίας του Baire και εφαρμογές του στη Συναρτησιακή Ανάλυση (Αρχή Ομοιομόρφου Φράγματος, Θεώρημα Ανοικτής Απεικόνισης, Θεώρημα Κλειστού Γραφήματος, Θεώρημα Banach- Steinhaus).
12η - 13η εβδομάδα. Χώροι με εσωτερικό γινόμενο, χώροι Hilbert, ορθοκανονικά συστήματα, κάθε χώρος Hilbert είναι ισομετρικά ισόμορφος με το δεύτερο δυϊκό του.

Σημείωση: Είναι ενδεχόμενο να υπάρξουν μικρές διαφοροποιήσεις στη σειρά και τη χρονική διάρκεια των παραπάνω υποενοτήτων του μαθήματος.

Διδάσκων του Μαθήματος:

Ανδρέας Τόλιας
Γραφείο: 501 ε, 5ος όροφος
Τηλέφωνο γραφείου: 26510 08282.
e-mail: atolias@uoi.gr

Απορίες - Ερωτήσεις:

Στη διάρκεια και τα διαλείμματα των διαλέξεων.
Στο γραφείο του διδάσκοντα, Τετάρτη 17.00 - 18.00 και Πέμπτη 19.00 -20.00.
Άλλη ώρα μετά από συνεννόηση με τον διδάσκοντα.

ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ :

ΟΡΙΣΜΟΣ: Διανυσματικός (ή Γραμμικός) χώρος επί του σώματος $\mathbb{R}$, είναι ένα σύνολο X με δύο πράξεις $+ : X \times X \to X$ η οποία $(x,y) \mapsto x+y$ και $\cdot : \mathbb{R} \times X \to X$ η οποία $(\alpha, x) \mapsto \alpha \cdot x$ ώστε να ικανοποιούνται τα ακόλουθα αξιώματα

1) $x+(y+z) = (x+y)+z \quad , \forall x,y,z \in X$
2) $\exists\, 0 \in X : \quad 0+x = x+0 = x \quad , \forall x \in X$
3) $\exists\, (-x) \in X : \quad x+(-x) = -x+x = 0 \quad , \forall x \in X$
4) $x+y = y+x \quad , \forall x,y \in X$

(1)–(4): αβελιανή ομάδα $(X,+)$

5) $1 \cdot x = x \quad , \forall x \in X$
6) $\lambda \cdot (\mu x) = (\lambda \mu) \cdot x \, , \forall x \in X$ και $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$
7) $(\lambda+\mu)x = \lambda x + \mu x \, , \forall x \in X$ και $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$
8) $\lambda(x+y) = \lambda x + \lambda y \quad , \forall x,y \in X$ και $\lambda \in \mathbb{R}$

Έτσι, έχουμε την γνωστή έννοια του διανυσματικού χώρου (δ.χ)

π.χ (Διανυσματικοί Χώροι)

i) ο χώρος $\mathbb{R}$ με πράξεις
$+ : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ και $\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

ii) ο χώρος $\mathbb{R}^k$ με πράξεις κατά συντεταγμένη:
$(x_1, \dots, x_k) + (y_1, \dots, y_k) = (x_1+y_1, \dots, x_k+y_k)$
και $\lambda(x_1, \dots, x_k) = (\lambda x_1, \dots, \lambda x_k) \quad , \forall \lambda \in \mathbb{R}$

iii) $C_{00}(\mathbb{N})$: ο χώρος των τελικά μηδενικών ακολουθιών πραγματικών αριθμών
$C_{00}(\mathbb{N}) := \{ (x_1, x_2, x_3, \dots) : x_i \in \mathbb{R}, \forall i, \exists\, i_0 \in \mathbb{N} : x_i = 0 , \forall i > i_0 \}$

με πράξεις κατά συντεταγμένη

iv) Εστω Y τυχόν σημείο
$\mathbb{F}(Y) = \{ f: Y \to \mathbb{R} \ , f \text{ συνάρτηση} \}$ με πράξεις κατά σημείο

v) $C(\mathbb{R}) = \{ f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \ , f \text{ συνεχής} \}$ με πράξεις κατά σημείο

ΟΡΙΣΜΟΣ: Αν X είναι δ.χ και Y ενα υποσύνολο του X ($Y \subset X$) λέγεται υπόχωρος του X αν $\forall y_1, y_2 \in Y$ ισχύει $y_1 + y_2 \in Y$ και $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ και $y \in Y$ ισχύει $\lambda y \in Y$.
Επίσης, ο χώρος Y λέγεται γνήσιος υπόχωρος του X αν $Y \neq X$

Πάντοτε το $\{0\}$ και X είναι (οι τετριμμένοι) υπόχωροι του X

Π.χ.
Αν $X = \mathbb{R}^3$ οι υπόχωροι του είναι οι εξής:
1) $\{0\}$ (μηδενικός)
2) οι ευθείες που περνούν από το $O(0,0,0)$
3) Τα επίπεδα που περνούν από το $O(0,0,0)$
4) $\mathbb{R}^3$

ΟΡΙΣΜΟΣ: Εστω X δ.χ (επί του $\mathbb{R}$). Η συνάρτηση $\|\cdot\|: X \to \mathbb{R}$ καλείται νόρμα αν:
1) $\|x\| \geq 0$, $\forall x \in X$ και $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \bar{0}$
2) $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\forall x \in X$
3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$, $\forall x, y \in X$

Το ζεύγος $(X, \|\cdot\|)$ λέγεται χώρος με νόρμα
Η νόρμα $\|\cdot\|$ ορίζει μία τοπολογική δομή πάνω στο X
Τότε η συνάρτηση $\rho = \rho_{\|\cdot\|} : X \times X \to \mathbb{R}$ με τύπο $\rho(x,y) = \|x-y\|$ είναι μία μετρική στο χώρο X (πληροί τον ορισμό της μετρικής, δηλαδή τις τρεις ιδιότητές της).
Άρα, όλες οι έννοιες που αφορούν μετρικούς χώρους μεταφέρονται στους χώρους με νόρμα ως προς αυτή τη μετρική

Π.χ

$\overline{A}$, A°, ∂A, σύγκλιση ακολουθιών (δηλαδή, εάν $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μία ακολουθία στον X και $x \in X$ τότε η ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \to x \Leftrightarrow \|x_n - x\| \to 0 \Leftrightarrow$ $(\forall \varepsilon>0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})\ n \geq n_0 \Rightarrow \|x_n - x\| < \varepsilon$.
Έτσι, γράφουμε $x_n \xrightarrow{\|\cdot\|} x$ ή $\|\cdot\|\text{-}\lim x_\nu = x$ (ή $x_n \to x$ ή $\lim x_\nu = x$ αν η νόρμα εννοείται))
Ανάλογα, ορίζονται και οι βασικές ακολουθίες
Ανάλογα, ορίζονται και οι συνεχείς συναρτήσεις με Π.Ο και Π.Τ. το X.
Άρα, ορίζονται και οι έννοιες της πληρότητας και της συμπάγειας υποσυνόλων του μ.χ. X

ΟΡΙΣΜΟΣ: Ένας χώρος με νόρμα $(X, \|\cdot\|)$ λέγεται χώρος Banach, αν ο $(X, \rho_{\|\cdot\|})$ είναι πλήρης (δηλ. αν κάθε βασική στον X, συγκλίνει).

ΟΡΙΣΜΟΣ: Δύο νόρμες σε ένα δ.χ λέγονται ισοδύναμες αν οι αντίστοιχες μετρικές είναι τοποδύναμες ανν καθορίζουν τα ίδια ανοιχτά σύνολα.

ΟΡΙΣΜΟΣ: Ένας μ.χ. (X, ρ) λέγεται διαχωρίσιμος αν υπάρχει $D \subset X$ με D αριθμήσιμο και πυκνό.

Βασικές Ιδιότητες:

1) Αν $(X, \|\cdot\|)$, τότε η συνάρτηση $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$ είναι ομοιόμορφα συνεχής (άρα είναι και συνεχής)

Αποδ.

$\forall x, y \in X$: $\|x\| = \|x-y+y\| \leq \|x-y\| + \|y\| \Rightarrow$

$\Rightarrow \|x\| - \|y\| \leq \|x-y\|$.

ομοίως, $\|y\| - \|x\| \leq \|y-x\| = \|x-y\|$

Επομένως, $\max\{\|x\|-\|y\|, \|y\|-\|x\|\} \leq \|x-y\| \Rightarrow$

$\Rightarrow \big|\|x\| - \|y\|\big| \leq \|x-y\|$, $\forall x, y \in X$ (1-Lipchitz)

Άρα, η νόρμα είναι ομ. συνεχής $\Rightarrow$ συνεχής

2) Αν $(X, \|\cdot\|)$, τότε οι συναρτήσεις

$+ : X \times X \to X$ με $(x,y) \longmapsto x+y$ και

$\cdot : \mathbb{R} \times X \to X$ με $(\lambda, x) \longmapsto \lambda x$ είναι συνεχείς

(όπου $X \times X$, $\mathbb{R} \times X$ είναι μ.χ ως γινόμενα δύο μετρικών χωρών)

Αποδ

Έστωσαν $(x_n, y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ τυχούσα ακολουθία στο $X \times X$ και $(x,y) \in X \times X$ ώστε $(x_n, y_n) \to (x,y)$

Τότε $x_n \to x$ και $y_n \to y$. Επιπλέον,

$\|(x_n + y_n) - (x+y)\| = \|(x_n - x) + (y_n - y)\| \leq$

$\leq \|x_n - x\| + \|y_n - y\| \to 0$

Άρα, $x_n + y_n \to x+y$.

Έστωσαν τώρα $(\lambda_n, x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ακολουθία στο $\mathbb{R}\times X$ και $(\lambda, x)\in\mathbb{R}\times X$, ώστε $(\lambda_n, x_n)\to(\lambda, x)$ δηλαδή $\lambda_n\to\lambda$ και $x_n\to x$. Επιπλέον,

$$\|x_n-\lambda_n\| = \|\lambda_n x_n - \lambda_n x) + (\lambda_n x - \lambda x)\| \leq$$
$$\leq \|\lambda_n x_n - \lambda_n x\| + \|\lambda_n x - \lambda x\| =$$
$$= \underbrace{|\lambda_n|\,\underbrace{\|x_n-\lambda_n\|}_{\to 0}}_{\text{φράγμ. επί μηδεν.}\to 0} + \underbrace{\underbrace{|\lambda_n-\lambda|}_{\to 0}\cdot\|x\|}_{\to 0} \to 0$$

Άρα, $\lambda_n x_n \to \lambda x$

3) Έστω $(X, \|\cdot\|)$ και Y γραμμικός υπόχωρος του X. Τότε, $\overline{Y}$ είναι επίσης γραμμικός υπόχωρος του X

Αποδ.

- Έστωσαν x, y εν $\overline{Y}$ και θδο $x+y\in\overline{Y}$ τότε υπάρχουν ακολουθίες $(x_n), (y_n)$ στον Y με $x_n\to x$ και $y_n\to y \Rightarrow x_n+y_n\to x+y$ Εφόσον το Y γραμμικός υπόχωρος $\Rightarrow x_n+y_n\in\overline{Y}$ για όλα τα $n\in\mathbb{N}$. Άρα, $x+y\in\overline{Y}$

- Ομοίως αν πάρουμε τυχαίο $\lambda\in\mathbb{R}$ τότε $\lambda x_n\to\lambda x$ με $\lambda x\in\overline{Y}$.

Στοιχεία Γραμμικής Άλγεβρας:

Παρατήρηση: Εάν X γραμμικός χώρος και $(X_i)_{i\in I}$ οικογένεια υποχώρων του X τότε $\bigcap_{i\in I} X_i$ υπόχωρος του X

ΟΡΙΣΜΟΣ 1: Αν X γραμμικός χώρος και $A\subset X$

ώστε η γραμμική θήκη του A, είναι ο ελάχιστος γραμμ. υπόχωρος του X που περιέχει το A (γράφουμε $\langle A \rangle$ ή $Span(A)$). Δηλαδή,

$$Span(A) = \bigcap \{ Y : Y \text{ γραμμικός υπόχωρος του } X, A \subset Y \}$$

Ένας άλλος ισοδύναμος ορισμός του $Span(A)$ είναι η εξής:

ΟΡΙΣΜΟΣ 2:

$$Span(A) := \left\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i : x_i \in A, \lambda_i \in \mathbb{R}, i=1,2,\dots,n \right\}$$

ΟΡΙΣΜΟΣ: Ένα υποσύνολο A ενός χώρου $(X, \|\cdot\|)$ με νόρμα λέγεται ολικό, εάν η γραμμική θήκη του A, είναι πυκνό υποσύνολο του X δηλ. αν $\overline{Span(A)} = X$

Πρόταση: Έστω $(X, \|\cdot\|)$ τότε ο χώρος X είναι διαχωρίσιμος $\Leftrightarrow$ υπάρχει αριθμήσιμο και ολικό υποσύνολο του X.

Απόδ.:

$\{\Rightarrow\}$: Προφανές αφού κάθε πυκνό είναι και ολικό

$\{\Leftarrow\}$: Ας υποθέσουμε ότι το A είναι αριθμήσιμο και $\overline{Span(A)} = X$ και θδο $\exists D \subset X$ αριθμήσιμο και πυκνό. Έτσι, ορίζουμε το σύνολο

$$D = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i, x_i \in A, \lambda_i \in \mathbb{Q}, i=1,2,\dots,n, n \in \mathbb{N} \right\}$$

το οποίο γράφεται ως ένωση αριθμήσιμων συνόλων $\Rightarrow D$ αριθμήσιμο

$$\hookrightarrow \left(D = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left\{ \sum \lambda_i x_i : (\lambda_1, \dots, \lambda_n, x_1, \dots, x_n) \in \overbrace{\mathbb{Q} \times \dots \times \mathbb{Q}}^{n \text{ φορές}} \times \underbrace{A \times \dots \times A}_{n \text{ φορές}} \right\} \right.$$

Μένει νδο D πυκνό στο X

Έστωσαν λοιπόν, $x \in X$ και $\varepsilon > 0$

Εφόσον $\text{Span}(A)$ πυκνό στο X τότε

$\exists\, y \in \text{Span}(A) : \|x-y\| < \frac{\varepsilon}{2}$

$\exists\, n \in \mathbb{N}$, $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ και $x_1, \dots, x_n \in A$

$y = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot x_i$

Για κάθε $i = 1, 2, \dots, n$ επιλέγουμε $\mu_i \in \mathbb{Q}$

$|\mu_i - \lambda_i| < \varepsilon / 2n\|x_i\|$

Τότε, $\sum_{i=1}^{n} \mu_i x_i \in D$

$$\|x - \sum_{i=1}^{n} \mu_i x_i\| = \|x-y\| + \|y - \sum_{i=1}^{n} \mu_i x_i\| <$$

$$< \frac{\varepsilon}{2} + \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i - \mu_i| \cdot \|x_i\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

ΛΗΜΜΑ

Αν $a, b \geq 0$ και $p > 1$ και $q > 1$ ώστε $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

Τότε $a \cdot b \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$ (*)

Αποδ.

Αν $a = 0$ ή $b = 0$ τότε η (*) προφανής

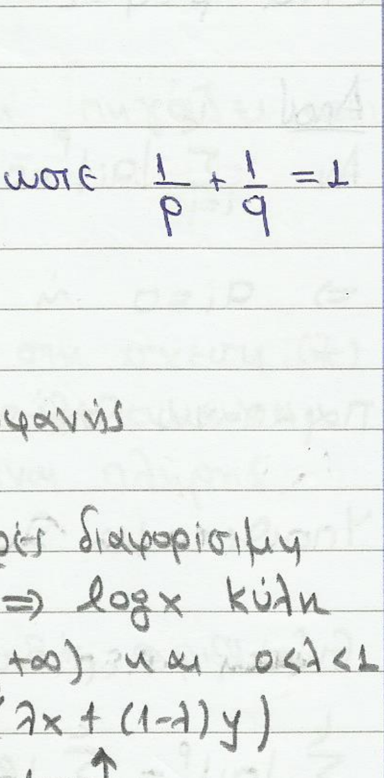
Υποθέτουμε $a > 0$ και $b > 0$

Η $\log : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ είναι δύο φορές διαφορίσιμη

με $(\log x)'' = -\frac{1}{x^2} < 0$, $\forall x > 0 \Rightarrow \log x$ κοίλη

Δηλαδή, για κάθε x και y εν $(0, +\infty)$ και $0 < \lambda < 1$

τότε $\lambda \cdot \log x + (1-\lambda) \log y \leq \log(\lambda x + (1-\lambda) y)$



Εφαρμόζοντας αυτή την ανίσωση

με $x = a^p$ και $y = b^q$ και $\lambda = \frac{1}{p} \to$

$\to 1 - \lambda = \frac{1}{q}$), έπεται:

$\frac{1}{p} \log(a^p) + \frac{1}{q} \log(b^q) \leq \log\left(\frac{1}{p} a^p + \frac{1}{q} b^q\right)$

$$\Rightarrow \log(\alpha\beta) \le \log\left(\frac{\alpha^p}{p} + \frac{\beta^q}{q}\right) \xrightarrow{\log \uparrow} \boxed{\alpha \cdot \beta \le \frac{\alpha^p}{p} + \frac{\beta^q}{q}}$$

ΣΗΜΕΙΩΣΗ / ΟΡΙΣΜΟΣ:

Δυο αριθμοί $p>1$ και $q>1$, για τους οποίους $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, λέγονται συζυγείς εκθέτες ($\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow p+q = p\cdot q \Leftrightarrow q = \frac{p}{p-1}$)

ΑΝΙΣΟΤΗΤΑ HÖLDER:

Εάν p, q συζυγείς εκθέτες και $a_1, \dots, a_k, b_1, \dots, b_k$ $2k$ αριθμοί τότε ισχύει:

$$\sum_{i=1}^{k} |a_i b_i| \le \left(\sum_{i=1}^{k} |a_i|^p\right)^{1/p} \cdot \left(\sum_{i=1}^{k} |b_i|^q\right)^{1/q}$$

(Για $p=q=2$ έχουμε την ανισότητα Cauchy-Swartz)

Αποδ

Αν $\sum_{i=1}^{k} |a_i|^p = 0$ ή $\sum_{i=1}^{k} |b_i|^q = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow a_i = 0$ ή $b_i = 0$, $\forall i = 1, 2, \dots, k$ και η

παραπάνω σχέση είναι προφανής.

Υποθέτουμε λοιπόν, ότι $\sum_{i=1}^{k} |a_i|^p$, $\sum_{i=1}^{k} |b_i|^q > 0$

Ειδική περίπτωση:

$\sum_{i=1}^{k} |a_i|^p = \sum_{i=1}^{k} |b_i|^q = 1$ Τότε από το προηγούμενο

λήμμα έπεται ότι $|a_i| \cdot |b_i| \le \frac{|a_i|^p}{p} + \frac{|b_i|^q}{q}$

Προσθέτοντας κατά μέλη τις k αυτές ανισότητες προκύπτει ότι:

$$\sum_{i=1}^{k} |a_i b_i| \leq \sum_{i=1}^{k} \left(\frac{|a_i|^p}{p} + \frac{|b_i|^q}{q} \right) = \sum_{i=1}^{k} \frac{|a_i|^p}{p} + \sum_{i=1}^{k} \frac{|b_i|^q}{q} =$$

$$= \frac{1}{p} \cdot \sum_{i=1}^{k} |a_i|^p + \frac{1}{q} \cdot \sum_{i=1}^{k} |b_i|^q = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

Γενική Περίπτωση:

Θέτουμε $A_i = \dfrac{|a_i|}{\left(\sum_1^k |a_i|^p\right)^{1/p}}$ και $B_i = \dfrac{|b_i|}{\left(\sum_1^k |b_i|^q\right)^{1/q}}$

και παρατηρούμε ότι

$$\sum_{i=1}^{k} |A_i|^p = 1 \quad \text{και} \quad \sum_{i=1}^{k} |B_i|^q = 1$$

Άρα, από την ειδική περίπτωση, πηγάζει ότι:

$$\sum_{i=1}^{k} |A_i B_i| \leq 1 \quad (*)$$

Με αντικατάσταση των A_i, B_i στη σχέση $(*)$ παίρνουμε την ανισότητα που θέλαμε να αποδείξουμε. Και η απόδειξη είναι πλήρης.

ΑΝΙΣΟΤΗΤΑ MINKOWSKI

Αν $p \geq 1$ και $x_1, \ldots, x_k, y_1, \ldots, y_k$ $2k$ αριθμοί τότε ισχύει:

$$\left(\sum_{i=1}^{k} |x_i + y_i|^p\right)^{1/p} \leq \left(\sum_{i=1}^{k} |x_i|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^{k} |y_i|^p\right)^{1/p}$$

Αποδ.

Για $p=1$ είναι προφανής η ανισότητα
Υποθέτουμε λοιπόν $p>1$
Θέτουμε: $A=\left(\sum_{i=1}^{k}|x_i+y_i|^p\right)^{1/p}$ και ορίζουμε
q να είναι ο συζυγής εκθέτης του p
δηλαδή: $q=\frac{p}{p-1}$.

$$A^p=\sum_{i=1}^{k}|x_i+y_i|^p=\sum_{i=1}^{k}\underbrace{|x_i+y_i|}_{\leq |x_i|+|y_i|}\cdot|x_i+y_i|^{p-1}\leq$$

$$\leq\sum_{i=1}^{k}|x_i|\cdot|x_i+y_i|^{p-1}+\sum_{i=1}^{k}|y_i|\,|x_i+y_i|^{p-1}\overset{\text{Hölder}}{\leq}$$

$$\leq\left(\sum_{i=1}^{k}|x_i|^p\right)^{1/p}\cdot\left(\sum_{i=1}^{k}|x_i+y_i|^{(p-1)q}\right)^{1/q}+$$

$$+\left(\sum_{i=1}^{k}|y_i|^p\right)^{1/p}\cdot\left(\sum_{i=1}^{k}|x_i+y_i|^{(p-1)q}\right)^{1/q}=$$

$$=\left(\sum_{i=1}^{k}|x_i|^p\right)^{1/p}\cdot A^{p/q}+\left(\sum_{i=1}^{k}|y_i|^p\right)^{1/p}\cdot A^{p/q}=$$

$$=A^{p/q}\left[\left(\sum_{i=1}^{k}|x_i|^p\right)^{1/p}+\left(\sum_{i=1}^{k}|y_i|^p\right)^{1/p}\right]\Rightarrow$$

$$\Rightarrow A^{p-\frac{p}{q}}\leq\left(\sum_{i=1}^{k}|x_i|^p\right)^{1/p}+\left(\sum_{i=1}^{k}|y_i|^p\right)^{1/p}$$

όπου $p-\frac{p}{q}=p\left(1-\frac{1}{q}\right)=\cancel{p}\frac{1}{\cancel{p}}=1$

Άρα,

$$A\leq\left(\sum_{i=1}^{k}|x_i|^p\right)^{1/p}+\left(\sum_{i=1}^{k}|y_i|^p\right)^{1/p}$$

Και η απόδειξη είναι πλήρης.